全國紙上談話会才14号

40 Primäre Integritätsbereiche及 Irreduzible Ideale ニ就テ

秋月康夫（三高）

最近到着シタ Math. Ann ニ Gröbner ガ "Über die irreduziblen Ideale" ナル論文ハ次ノ定証ヲ述ベテヰマス.

$\mathfrak{R}$ ヲ Teilerkettensatz ヲ充ス Ring, α ヲ Nicht Nullteiler トスル時 Hauptideal (α) ガ regulär ナルタメノ充分条件ハ $\mathfrak{R}$ ガソノ Quotientenring ニ於テ ganz-abgeschlossen ナルコトデアル. コヽニ regulär トハ

i) 各 Primärkomponent ガ isoliert デアリ,

ii) 各 Primärkomponent ガ irreduzibel デアル.

此ヲ云ッテヰマス.

コノ定理ノ特ニ $\mathfrak{R}$ ガ Doppelkettensatz (但シ (a) ニ対シテノ倍鎖律ヲ許サナイ) ヲ充ズ Integritätsbereich 当テヽメマスト、i) ハ何ノ条件モナシニ成立シ、ii) ノ方ハ $\mathfrak{R}$ ガ ganz abgeschlossen ナハ Primärideal ハ Primideal ノ累デスカラ余リニ明白デアリマス. ソレデ以下ガハ整域ニ於テ Hauptideal ガ irreduzibel ナルタメノ必要且充分ナ条件ヲ求メヨウト思ヒマス.

問題ハ Primärideals ノミニツイテデスカラ $\mathfrak{p}$ カ $\mathfrak{R}$ ノ一ッハ Primideal トスル時、Krull ノ regulären Quotientenring $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ (Math. Ann. 99) ノ基礎ニ於テ試ミスレバ結構デアリマス. 夫レデ $\mathfrak{R}$ ハ Primären Integritätsbereich トシテオキマス. アル $\mathfrak{R}$ ノ凡テノ Ideal ハ $\mathfrak{R}$ ト (0) ノ Mノハ $\mathfrak{p}$ ニ属スル Primärideal デ

$\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ ハ $\mathfrak{q}$ ノ凡テノ unmittelbare Vielfache ニ含マレ、

$\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ハ $\mathfrak{q}$ ノ凡テノ unmittelbare Teilers ヲ含ミ $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ ニ関シ

相互ニ operationsomorph ナ Minimalideale ノ直和デアリマス.

従ッテ $\mathfrak{o}$ ノ Notwendige Idealbasis ノ Anzahl ハ $\mathfrak{o}/\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ ヲソノ Minimal Ideale ノ Direkte Summe トシタ時ハ Summand ノ Anzahl ニ等シイ。

故ニ Hauptideal $\mathfrak{o}$ ハソノ直接倍数カ $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ ガ唯一ッノ様ナモノデアリ irreduzible Ideals ハソノ直接約数ガ唯一ットナル様ナモノデアリマス.

次ニ K ヲ $\mathfrak{R}$ ノ Quotientenkörper ノ $\mathfrak{o}$ ヲ K 内ノ $\mathfrak{R}$ ニ関シテ algebraisch ganz abgeschlossen ナ環(即チ Hauptordnung)トシマス.

$\mathfrak{o}$ ノ K ニオケル Operatorenbereich ハ $\mathfrak{o}$ ノ一ツノ下環ヲ作リマスガ Dedekind ニ遡ッテコレヲ $\mathfrak{o}^0=\mathfrak{o}:\mathfrak{o}$ デ示シ $\mathfrak{o}$ ノ Ordnung ト呼ビマセウ。

$\boxed{\text{定理1}}$ $\mathfrak{p}^0=\mathfrak{R}$(即チ $\mathfrak{p}$ ガ最高階ノ Ideal)ナルトキハ $\mathfrak{R}$ ハ ganz-abgeschl デアル。

<u>証明</u>. $\alpha\in\mathfrak{p}$ トシ $\beta\in(\alpha):\mathfrak{p}$, $(\beta)\notin(\alpha)$ ナル β ヲトリマス。然ラバ $\beta\mathfrak{p}\equiv 0\ (\alpha)$ 所デ $\beta\mathfrak{p}=(\alpha)$ ナラズトシマスト (α) ハ唯一ツノ $\alpha\mathfrak{p}$ シカ直接倍数ガナイカラ $\beta\mathfrak{p}\equiv 0\ (\alpha\mathfrak{p})$, 即 $(\alpha,\beta)\mathfrak{p}=\alpha\mathfrak{p}$. 所デ $\alpha\mathfrak{p}:\mathfrak{p}=\alpha\mathfrak{p}^0=(\alpha)$ ($\because \mathfrak{p}^0=\mathfrak{R}$) デスカラ $(\alpha,\beta)\equiv 0\ (\alpha)$ トナリ矛盾シマス. $\therefore (\alpha)=\beta\mathfrak{p}$ 依ッテ $(\alpha):\mathfrak{p}=(\beta)$

サテ $\mathfrak{p}=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\mathfrak{p}^2)$ トシマス時 $(\gamma_1):\mathfrak{p}=(\bar\gamma_1)$ 又 $\bar\gamma_1\mathfrak{p}=\gamma_1\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2)$

従ッテ $\bar\gamma_1\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ 夫故 $\mathfrak{p}=(\gamma_1)$ ($\because \bar\gamma_1$ ハ Einheit)

即チ $\mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{p}^2$ ノ間ニハ Zwischenideal ガ存在シナイ. 従ッテ $\mathfrak{R}$ ハ ganz-abgeschl デス(証了)

次ニ $\mathfrak{R}$ ヲ gang-abgeschl. デナイトシテ、

$$\mathfrak{o}\supset\mathfrak{o}_1\supset\mathfrak{o}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{R} \quad : \quad \text{Ringkette トスレバ}$$

$$\mathfrak{f}_0=\mathfrak{R}:\mathfrak{o}\leqq\mathfrak{f}_1=\mathfrak{R}:\mathfrak{o}_1\leqq\cdots \quad \text{ハ Führer-Kette ヲ作リマス。}$$

Ringkette ヲ適当ニトレバ Fuhrer-Kette ノ端ハ $\mathfrak{p}$ デナケレバナリマセン. 何

$\mathfrak{R}=\mathfrak{O}$トナルカラデス. 次ニ$\mathfrak{O}$ニ$\mathfrak{f}$ヲFührerトスルRingノKetteハ有限項ヨリアリマセン 何トナレバ $\mathfrak{R}:\mathfrak{O}'=\mathfrak{R}:\mathfrak{O}''=\mathfrak{f}$ デ$\mathfrak{O}'$ト$\mathfrak{O}''$トノZwischenringeノKetteガ無限ニ多クノ項ヲ有スレバ $\alpha\in\mathfrak{f}$ ニトリマス時 $\alpha\mathfrak{O}'$ト$\alpha\mathfrak{O}''$ナル ニツノ$\mathfrak{R}$-Idealeノ間ニDoppelkettensatzガ成立シナクナルカラデアリマス. ヨツテ次ノ定理ヲ得マス.

$\boxed{\text{定理2}}$ 吾々ノ整域デハ常ニ直接上環(即ソノ環トノ間ニZwischenringヲ介サナイキノ)ガ存在シ 特ニ$\mathfrak{f}_0\neq(0)$ナル時ハ$\mathfrak{O}$ハEndlich $\mathfrak{R}$-Modulデアル. 逆ニ$\mathfrak{O}$ガEndlich $\mathfrak{R}$-Modul ナラバ $\mathfrak{f}_0\neq(0)$デアル.

定理1カラ$\mathfrak{f}$ハ某カソノ上環ノFührerデスガ更ニ詳シク

$\boxed{\text{定理3}}$ $\mathfrak{f}$ハソノ何レノ直接上環ヲトツテモソノFührer デアル. 従ッテ多々 直接上環ヲ有スル時ハソレ等ニヨッテerzeugenサレル 上環 Führer デアル.

(証明ハ拙著東北数学雑誌37巻 Satz 2、トの様)

愈 初ノ問題ニ帰ッテ

$\boxed{\text{定理4}}$ $\mathfrak{R}$ガ ganz-abgeschlossen ナラバ Hauptideal ハ irreduzibel デアル. $\mathfrak{R}$ガganz-abgeschl ナラザルキ $\mathfrak{R}$デノHauptidealガ irreduzibel ナルタメノ必要且充分ナ条件ハ $\mathfrak{f}^0=\mathfrak{R}'$ガ$\mathfrak{R}$ノ直接上環ニシテ$\mathfrak{R}'$ガ $\mathfrak{R}$-Modul トシテ einfach ナルコトデアル.

[注意] $\mathfrak{f}^0$ガ$\mathfrak{R}$ノ直接上環ナルコトハ$\mathfrak{R}$ノ直接上環ガ唯一ツナルコトヲ含ミマス(定理3) 併シ此ノ逆ハ成立シマセン.

証明; i) 必要ナルコトー $\alpha\in\mathfrak{f}$ トトル. サテ $\mathfrak{f}^0=\mathfrak{R}'$ 故 $\alpha\mathfrak{f}=\alpha\mathfrak{R}'\mathfrak{f}$

$$(\alpha):\mathfrak{f}\geqq\alpha\mathfrak{f}:\mathfrak{f}\geqq\alpha\mathfrak{R}' \quad \text{ヨッテ} \quad (\alpha):\mathfrak{f}/(\alpha)\geqq\alpha\mathfrak{R}'/\alpha\mathfrak{R}=\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$$

$\mathfrak{R}'$ガ$\mathfrak{R}$-Modul トシテ einfach デナイト $(\alpha):\mathfrak{f}/(\alpha)$ ハ ソクトモニツノ Minimale

+ ii) 充分ナルコト：— $\alpha \notin \mathfrak{p}$ ナラ α ハ Einheit. 従ッテ $(\alpha)=\mathfrak{R}$ ノナリ irreduzibel デス $\alpha \in \mathfrak{p}$ ナル時 $(\alpha:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ ハ niedrigeren Stufe デ (α) ニ含マレル。所デ (α) ハ höchste Stufe デアリ且直接倍数ハ $\alpha\mathfrak{p}$ ガ唯一ツナル故

$$(\alpha;\mathfrak{p})\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\alpha\mathfrak{p}) \quad \therefore \ \alpha:\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$$

一方 $\mathfrak{p}^0=\mathfrak{R}'$ 故 $\alpha\mathfrak{p}:\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{R}'$ $\therefore \ \alpha:\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{R}'$

$\alpha:\mathfrak{p}/(\alpha) \cong \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}$ デコレハ $\mathfrak{R}$-Modul トシテ einfach デスカラ (α) 唯一ツノ直接約数ヲ有スルノミ。$\therefore$ $\alpha\mathfrak{R}$ ハ irreduzibel デス（証了）

尚注意スベキコトハ、

$\boxed{\text{定理 5}}$ $\mathfrak{p}^0=\mathfrak{R}'$ ナル中, $\mathfrak{R}$ デノ最高階 Ideal ハ全部 Hauptideal デアル。

証明ハサレデ困難デハアリマセン. Zweigliedrigs Idealbasis ヲ有スル Ideal ガ最高階デアリ得ナイコトヲ先ズ証シ n-gliedrig ノ Ideal ガ最高階ナラ $(n-1)$-gliedrig ナ最高階 Ideal ノ存在シナケレバナラヌコトヲ証明シマス。次ニ

$\boxed{\text{定理 6}}$ $\mathfrak{p}=(\alpha_1,\alpha_1)$ ナル時ハ Hauptideal ハ irreduzibel デアル。

コレノ証明ニハ Krull [Ein Satz über die primären Integritätsbereiche, Math. Ann. Bd. 103] ノ結果ヲ要シマス. 即チ $\mathfrak{O}$ デモ常ニ Doppelkettensatz ガ成立スルトノ定理デアリマス。ソノ結果ヲ用ヒマスト

$\mathfrak{p}\mathfrak{O}=\pi\mathfrak{O}$ ナル要素 π ガ存在スル。今 α_1, α_2 ヲ適当ニトッテ、ソノ一方ヲ π ニナル様ニ出来ル時トシマス. 即チカヽル π ノ一ツガ $\mathfrak{R}$ ニ属スルトシマスト

$$\mathfrak{p}=(\pi, \alpha) \qquad \alpha=\pi\alpha' \qquad \alpha' \in \mathfrak{O}\,.$$

$\mathfrak{p}$ ヨリ $\pi\mathfrak{R}$ ニ到ル Vielfachenkette ハ明カニ

$$\mathfrak{p}=(\pi\alpha', \pi\mathfrak{R}) \quad \mathfrak{q}_1=(\pi^2\alpha'^2, \pi\mathfrak{R}), \ \dots, \ \mathfrak{q}_{n-2}=(\pi^{n-1}\alpha'^{n-1}, \pi\mathfrak{R}) \quad \mathfrak{q}_{n-1}=\pi\mathfrak{R}$$

ナル形ヲトリマス。従ッテ $\mathfrak{p}=(\pi\alpha', \pi^2\alpha'^2, \dots, \pi^{n-1}\alpha'^{n-1}, \pi\mathfrak{R})$

$$\mathfrak{p}^0=(\pi^{n-2}\alpha'^{n-1}, \mathfrak{R})$$

$\pi \in \mathfrak{R}$ ナル時ハ $\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{O}$ ニ対シテ極ク格段ナ場合ニシカナラナクナッテ定理ヽ成立スルダラウト思ヒマス. 而シテ此ノ場合ハ $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ガ endlicher Körper ノ時ニ限リマス.

定理5, 6ヲ数環ニ適用シマスト 一ツノ整数デ erzeugen サレル Ring デハ Einheitenklasse ニゾクスル Primärideale ガ irreduzibel デソノ環ノ最高階 Ideal ハ Einheitenklasse ニゾクスルモノノミ。

コレデニツ数体環（拙著輯報XI巻）ノ基本定理ガ拡張ヤラレタコトニナリマス. 定理6ノ条件ハ必ズシモ必要デハナイノデスガソレニツイテ次定理ガ成立スルノデハナイカト推測シテ居マス.

[推測]: $\mathfrak{p}^2$, $\pi\mathfrak{R}$ ノ長サヲ夫々 m, n トスル時

$m=3$ ナル時 $n = 2, 3, 4, 5, \dots$ （常ニ成立） （定理6）

$$\left.\begin{array}{ll} m=4 & n = 4, 6, 8, \dots \\ 5 & n = 5, 8, 11, \dots \\ 6 & n = 6, 10, 14, \dots \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\}$$

ナル時ソノ時ノミ凡テノ Haupt-ideal ガ irreduzibel ニナルコトガアリ得ル.

話ハ変リマスガ Krull ノ Primäre Integritätsbereiche ニ於ケル結果 [loc. cit.] i) $\mathfrak{O}$ デハ常ニ Doppelkettensatz ガ成立スル. ii) $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{p}$-adischen abgeschlossenen Ring $\mathfrak{R}^*$ ガ nilpotentes Element ヲ含マナイ時ソノ時ノミ $\mathfrak{O}$ ハ endlich $\mathfrak{R}$-Modul ヲアル. トノ定理ハ Krull 自身 methodisch ニ interesse デアルト申シテ居マス通リ, ソノ証明ハ先ズ $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{R}^*$ ニ移シ $\mathfrak{R}^*$ デ結果ヲ出シ更ニ $\mathfrak{R}^*$ カラ $\mathfrak{R}$ ヘ返シテ来テ興趣深イモノデスガ $\mathfrak{R}^*$ ヘ移ス時 Teilerkettensatz ガ保存サレルコトノ証明ガ可成難渋デアリ, 又 $\mathfrak{R}^*$ カラ $\mathfrak{R}$ ヘ返スニハ Bewertungstheorie ヲ利シテ居マス. 勿論以上ヤリマシタ私ハ初等的ナ方法デハ (i) ハ証明セラレサウモアリマセンガ (ii) ノ方ハ

極ク簡單ニ出サウデアリマス．即チ定理２ヲモウ少シ詳シウシマス．

$\mathfrak{f}_1 \neq 0$ ナル時 $\xi \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^n)$ (n: gegeben) ニシテ $\xi^{\rho} \equiv 0\ (\mathfrak{p}^M)$ ガ M ヲ如何ニ大ニトルモ成立スルコトハアリマセン。

次ニ $\mathfrak{f}_1 = 0$ ナル時（即 $\mathfrak{R}$ ヨリ $\mathfrak{O}$ マデノ Ringkette ノ項ガ無限ニ多イ時）n ヲカナリ大キクトツテオケバ上ノ Kongruenz ガ M ノドレナ値ニ対シテモ成立スルコトヲ云ヒマス．コレデ(ii)ノ部分ハ証明サレタコトニナリマセウ．証明ハ Krull ニ従ツテ p ヲ $\mathfrak{p}$ ノ任意ノ Element トスル時 K (Quotientenkörper) ノ Element ハスベテ $\frac{r}{p^i}$ ($r \in \mathfrak{R}$) ナル形ニ書ヘラレルコトヲ注意シ次ニ $\frac{\alpha}{p^i}$ (i, fest) ガ ganz 即チ $\mathfrak{O}$ ニ属スル様ナ $\frac{\alpha}{p^i}$ ノ全体ノ作ル Menge ヲ $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ トシマス．$\mathfrak{M}_1$ ヨリ初メテ $\mathfrak{M}_1$ ニ含マレル $\mathfrak{R}$ ヲ含ム最大環ヲ $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{M}_i$ デハソレニ含マレ $\mathfrak{O}_{i-1}$ ヲ含ム最大環ノ一ツヲ $\mathfrak{O}_i$ トシマス．然ル時 $\frac{\alpha}{p^i} \in \mathfrak{O}_i$ ナル α ($\in \mathfrak{R}$) ノ集ヲ $\mathfrak{q}_i$ デ示シマス．スルト容易ニ各々ノ場合デ $p\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_{i+1}$ トナルコトガ不可能デアルコト及

$$(p, \mathfrak{q}_1) \supseteq (p, \mathfrak{q}_2) \supseteq (p, \mathfrak{q}_3) \supseteq \cdots \quad (\supseteq p\mathfrak{R})$$

ナル Vielfachenkette ノ終ル所ヲ $(p, \mathfrak{q}_i) = (p, \mathfrak{q}_{i+1}) = \cdots$

トスレバ k ヲ如何ニ大ニトルモ $\mathfrak{q}_{i+k} \not\equiv 0\ (p\mathfrak{q}_i)$ ナルコトヨリ $p\mathfrak{q}_i$ ニ含マレル最初ノ $\mathfrak{p}$ 冪ヲ $\mathfrak{p}^n$ トスル時 $\mathfrak{q}_{i+k} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^n)$ デアリマス．

今 $\beta_k \in \mathfrak{q}_{i+k}$ ヲトレバ $\beta_k = p^{i+k}\omega_{i+k}$, $\omega_{i+k} \in \mathfrak{O}_{i+k}$ 従ツテ $\omega_{i+k}^2 \in \mathfrak{O}_{i+k} \subset \mathfrak{M}_{i+k}$

$$\therefore \quad p^{i+k}\omega_{i+k}^2 = \beta_k' \in \mathfrak{R}$$

夫故 $$\beta_k^2 = p^{i+k}\beta_k' \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}^{i+k})$$

コノコトハ k ヲ如何ニ大ニトルモ成立スル故

$\beta \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^n)$ ニシテ $\beta^{\rho} \equiv 0\ (\mathfrak{p}^M)$ ガ M ヲ如何ニ大ニトルモ成立スルコトニナリマス。（証明了）

以上ノコトハ二次 三次数環ニツイテ見タ所デ一般化シタ一ツノ試デアリマスガ尚 $\mathfrak{p}^{n+1}$ ニヨル Restklassenring ノ Ideal ガ n-gliedrig Ideal basis ヲ有スル時ハ R-Ideal 全体 n-gliedrig デハナイカト思ッテ居マス。n=1 ナラバ $\mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{p}^2$ トノ間ニ Zwischenideal ガナイ時デ コノ件ハ凡テ Hauptideal（即チ園先生ノ定理）デアリマス。n=2, 3 ノ時 正シイコトハ出来テ居マス。（昨年及本年数物年会デ講ジマシタ）

又 $\mathfrak{p}$ ト $\mathfrak{p}^2$ ノ間ノ Ideal ノ様ナデ ソノ環ノ最高階 Ideal ノイデアル級準群デ占メル位置ガ可成リ確定セラレルノデハナイカト思ッテ居マス。例ヘバ $\mathfrak{p}=(\alpha_1, \alpha_2)$ ナラソノ最高階 Ideal ハ Einheitenklasse ニゾクスルト云フ風ニ

又二次、三次数環デハ 二ツノ Primärideal ノ積ノ長サハ各因子ノ長サノ和ニ等シイカ ソレヨリ長クナイ。而シテ丁度和ニ等シイ時ハ各因子ノゾクスル級ガソノ準群ノ互ニ fremd ナ母元素トナッテヰル（一ツガ Einheitenklasse ノ時ハ 他ハ何デモヨイガ）コトヲ見マシタ。コレラモ一般ニ拡張出来ルノデハナイデセウカ？

9、10、2、受取